Chemins auto-évitants

Définition

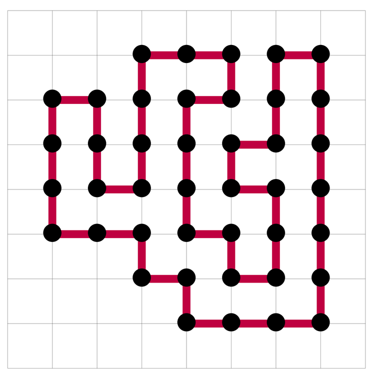
Plaçons-nous sur une grille (aussi appelée réseau).

- On appelle **chemin auto-évitant**, tout chemin du réseau ne passant pas deux fois par le même sommet.
- Si le chemin est de plus fermé, on parle alors de **polygone auto-évitant**.
- Un chemin auto-évitant remplissant toute la grille (finie) est dit **hamiltonien**.

Polygones auto-évitants

On se place sur une grille carrée

Voici un polygone auto-évitant de longueur 42.



Il n'existe pas de polygone auto-évitant de longueur impaire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons p_n le nombre de polygones auto-évitants de longueur $2n$. On n'a pas de formule donnant p_n en fonction de n. Les différentes valeurs sont calculées informatiquement :

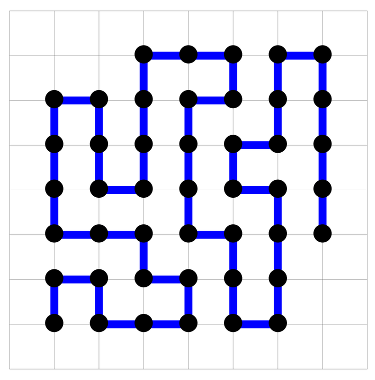
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	0	8	24	112	560	2976	16464	94016	549648	3273040

Dans l'**OEIS**, c'est la suite **A010566**.

Chemins auto-évitants

On se place sur une grille carrée

Voici un chemin auto-évitant de longueur 44



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n. On peut calculer à la main les premières valeurs : $c_1 = 4$, $c_2 = 12$, $c_3 = 36$ puis cela devient laborieux (et peut être fait informatiquement). Les premières valeurs sont

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	4	12	36	100	284	780	2172	5916	16268	44100

On ne connaît pas de formule exacte donnant c_n en fonction de n.
Dans l'**OEIS**, c'est la suite **A001114**.

Des recherches récentes

Hugo Duminil-Copin (mathématicien Français né en 1985 et médaillé Fields en 2022) ainsi que **Stanislas Smirnov** (mathématicien Russe né en 1970 et médaillé Fields en 2010) ont travaillé sur les chemins auto-évitants des réseaux hexagonaux.
On ne connaît toujours pas de formule exacte donnant le nombre de chemins/polygones auto-évitants de longueur n d'une grille carrée.

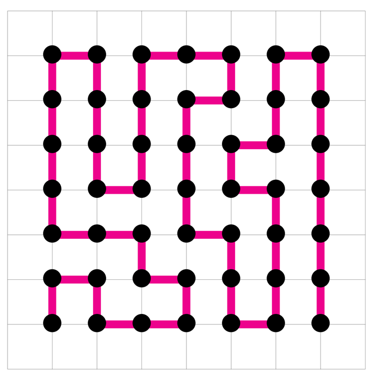
William Rowan Hamilton ...

...est un mathématicien et physicien Irlandais (1805 - 1865). Il a travaillé dans divers domaines des mathématiques (quaternions, équations polynomiales, groupes...) et il donne son nom aux graphes (ou chemins ici) hamiltoniens et au célèbre théorème de Cayley-Hamilton !

Chemins hamiltoniens auto-évitants

On est toujours sur une grille à maillage carré

En voici un de longueur 49 qui remplit toute notre grille de taille 7×7 :

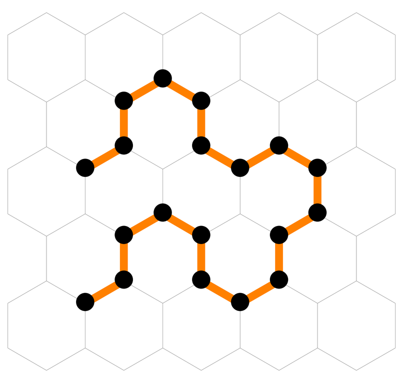


Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n le nombre de chemins auto-évitants hamiltoniens d'une grille carrée de taille $n \times n$. (h_n) est la suite **A120443** de l'**OEIS**. Informatiquement, on obtient les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_n	1	4	20	276	4324	229348	13535280	3023313284	745416341496	730044829512632

Sur une grille hexagonale ?

On travaille maintenant sur une **grille hexagonale** (ou en "nid d'abeille"). Voici un chemin auto-évitant de longueur 18 :



En notant toujours c_n le nombre de chemins auto-évitants de la grille hexagonale, on a les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	1	3	6	12	24	48	90	174	336	648

Cette suite est référencée dans l'**OEIS** : il s'agit de la suite **A001668**.
On peut de même dénombrer les polygones auto-évitants et les chemins auto-évitants hamiltoniens.

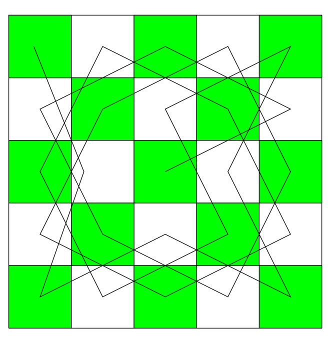
De jolis résultats

Jolis et récents !

- Dans le cas du **réseau carré**, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$2^n \leq c_n \leq 4.3^{n-1}$$
- Dans le cas du **réseau hexagonal**, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(\sqrt{2})^n \leq c_n \leq 3.2^{n-1}$$
- Pour tous n et m entiers on a
$$c_{n+m} \leq c_n c_m$$
ce qui assure la convergence de $(c_n^{1/n})$. Dans le cas du réseau hexagonal, on a $\lim c_n^{1/n} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ (résultat de H. Duminil-Copin et S. Smirnov).

Problème voisin

Partant d'un échiquier de taille $n \times m$, il s'agit de faire visiter au cavalier chaque case de l'échiquier une et une seule fois : c'est le **problème du cavalier** d'Euler.



25	14	3	8	19
4	9	18	13	2
15	24	1	20	7
10	5	22	17	12
23	16	11	6	21

Le théorème de Schwenk donne les conditions d'existence d'au moins une solution.

Encyclopédie des suites d'entiers (OEIS)

L'OEIS **O**nline **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences est une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique. On y trouve par exemple la suite de Fibonacci (**A000045**) ou encore la suite des nombres de Catalan (**A000108**). Chaque suite dispose d'un identifiant (**A001114** pour la suite dénombrant les chemins auto-évitants dans un réseau carré) et pour chercher une suite de la base, il suffit de rentrer sur le site ses premiers termes.