

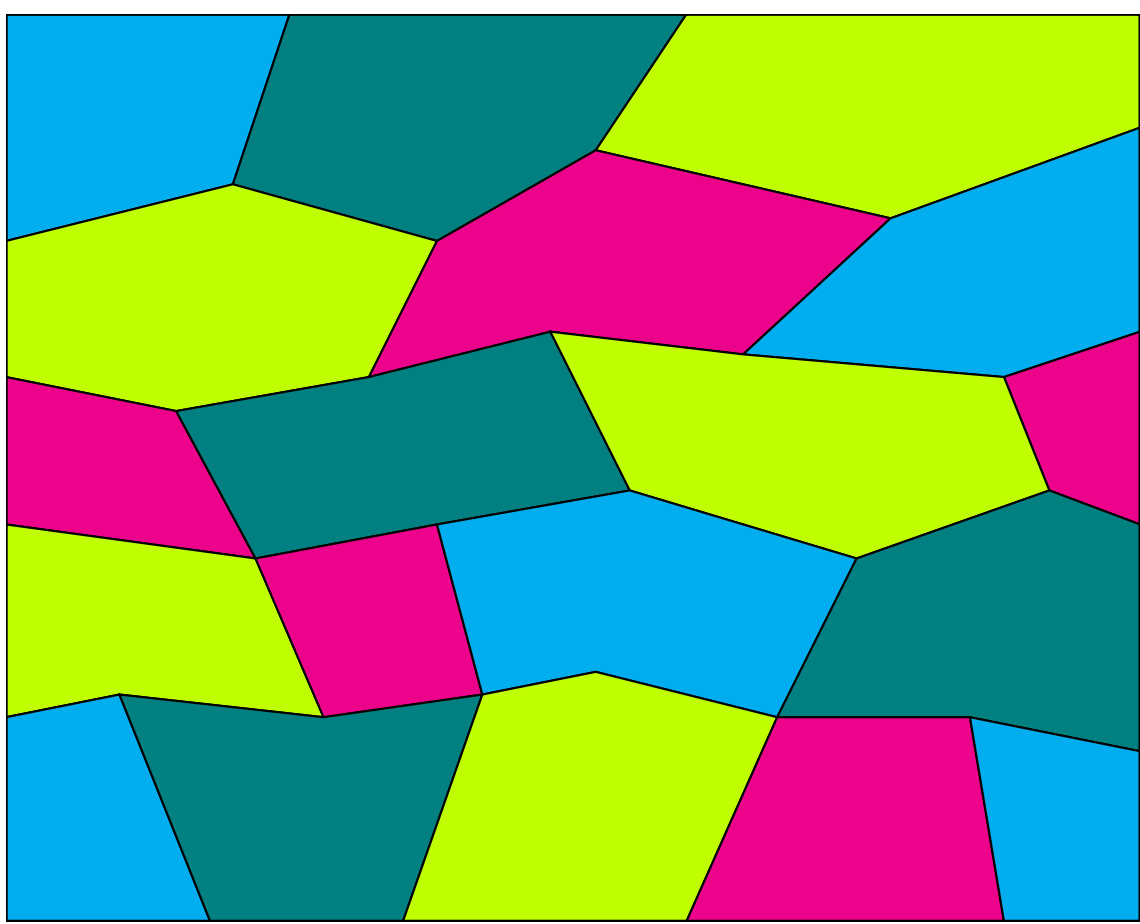
LE THÉORÈME DES QUATRE COULEURS

Un problème de coloriage

On considère une **carte** représentant par exemple des pays (ou des régions, ou des départements, ...). On s'intéresse au nombre de **couleurs** dont on a besoin pour colorier cette carte de façon à ce que **deux pays possédant une frontière commune ne soient pas de la même couleur**.

~~~~~ Résultat ~~~~~

Le théorème des quatre couleurs nous garantit que 4 couleurs suffisent.



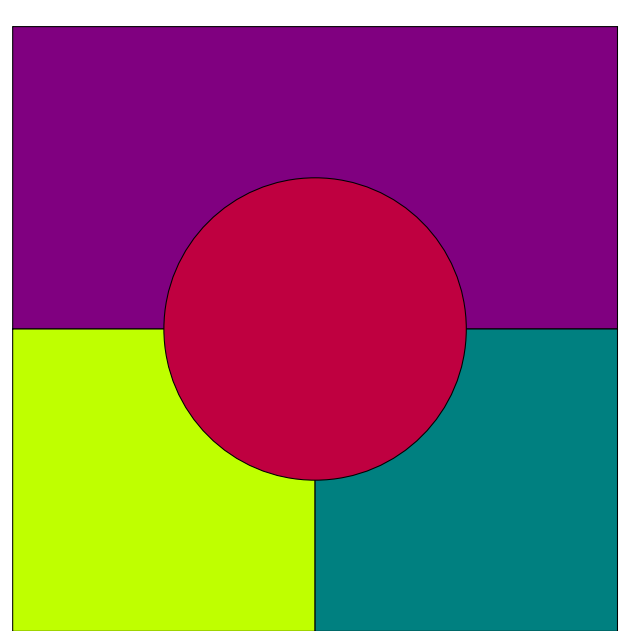
## Quelques dates

- **1840** : conjecture de l'énoncé
- **1880** : une première démonstration qui s'avère fausse
- **1890** : preuve du théorème des **cinq** couleurs en utilisant l'idée de la fausse démonstration de 1880
- **1960** : une première **preuve par informatique**
- **2026** : on ne connaît toujours pas de preuve ne faisant pas appel à l'ordinateur

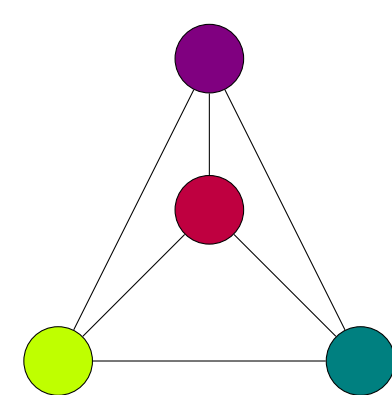
Ce problème, d'énoncé très simple, ne dispose pas pour le moment de **démonstration simple** malgré les nombreuses tentatives de mathématiciens et amateurs de mathématiques. Le **recours à l'ordinateur** dans la preuve actuelle est indispensable pour explorer tous les sous-cas qu'il faut étudier.

## Et avec trois couleurs ?

L'exemple suivant permet de montrer que cela n'est pas possible avec seulement trois couleurs :

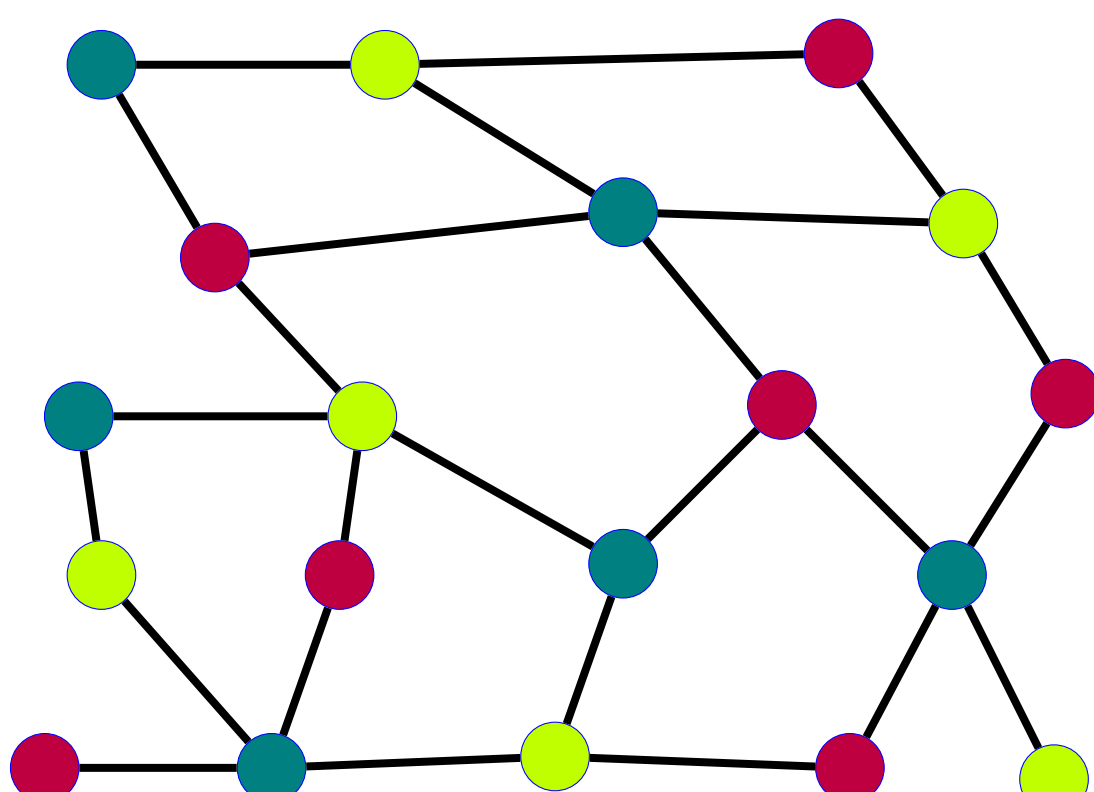


version "carte"



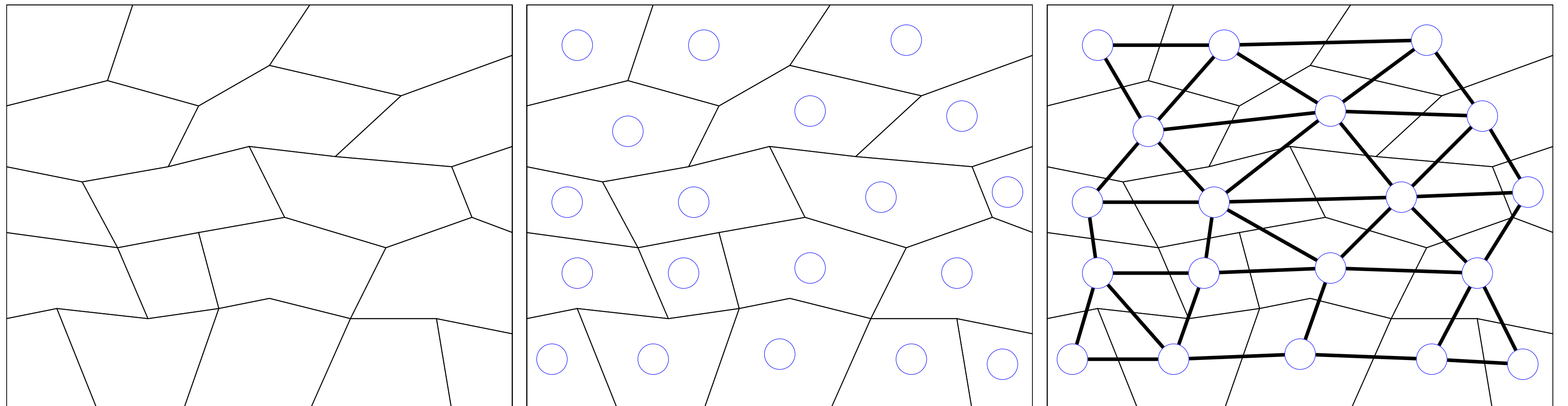
version "graphe"

Néanmoins, le théorème de GRÖTZSCH nous assure qu'il est possible de colorier avec **trois couleurs seulement** tout graphe planaire sans triangle. Ainsi, le **nombre chromatique** d'un tel graphe est inférieur ou égal à 3.

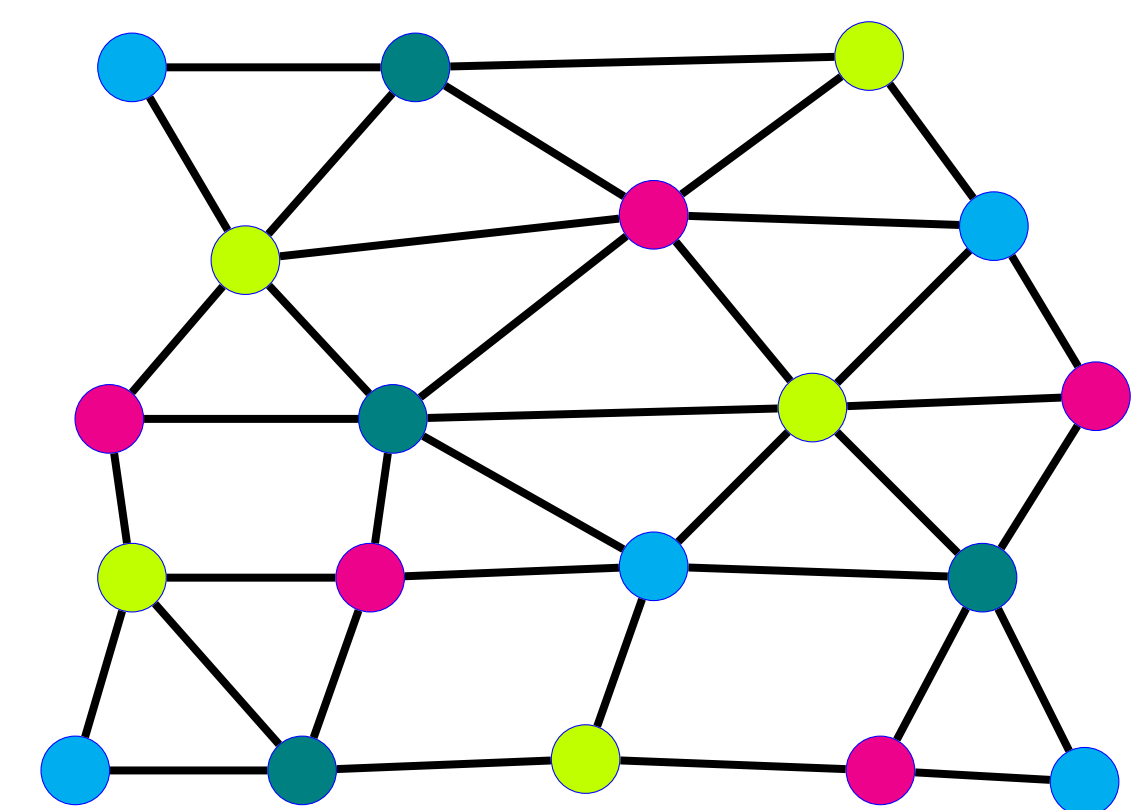
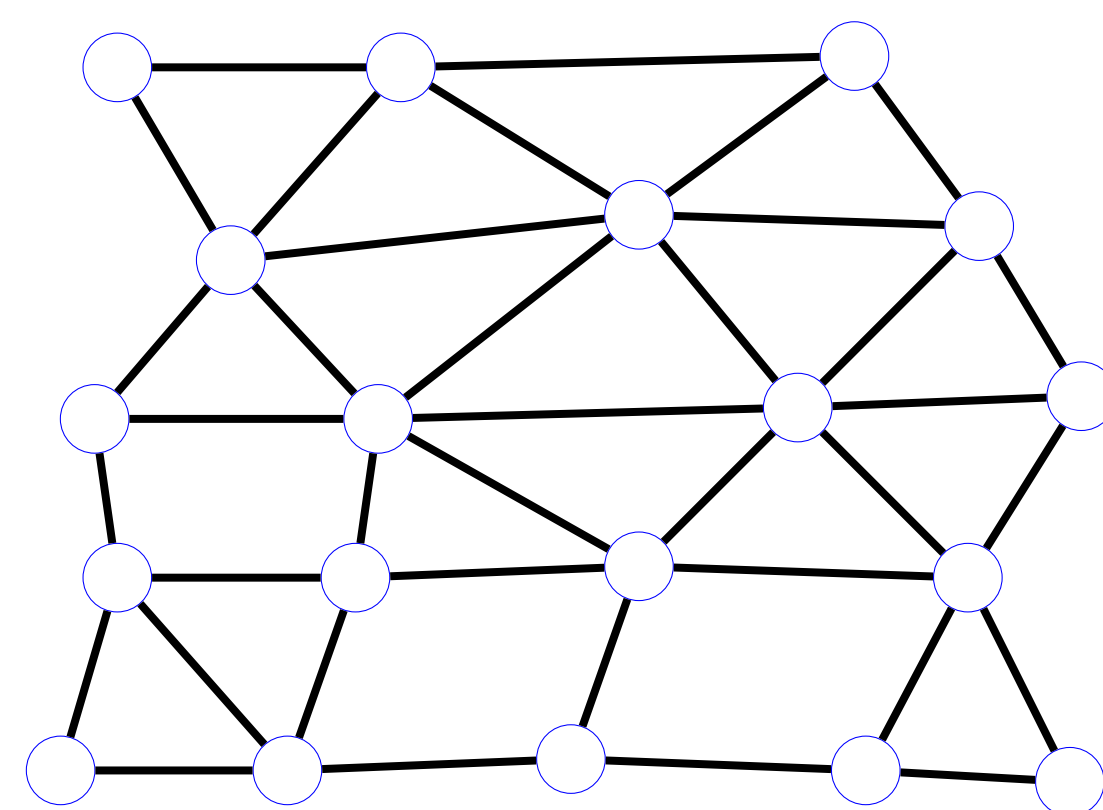


## Formalisation du problème avec des graphes

Nous allons transposer ce problème de **coloriage de carte** en un problème de **coloriage de graphe**. Pour y parvenir, partant d'une carte, on place, **dans chaque partie un point** (qui sera un **sommet** de notre graphe) et on relie deux sommets entre eux si les deux parties auxquelles ils appartiennent ont une frontière commune.



On obtient finalement ce graphe dont il s'agit de colorier les sommets de façon à ce que **deux sommets reliés soient de couleurs différentes**.



Le théorème affirme donc que tout graphe planaire (c'est-à-dire pouvant se représenter dans le plan sans croisement d'arêtes) peut se colorier avec 4 couleurs. C'est un théorème qui ne possède **pas de preuve simple pour le moment**.

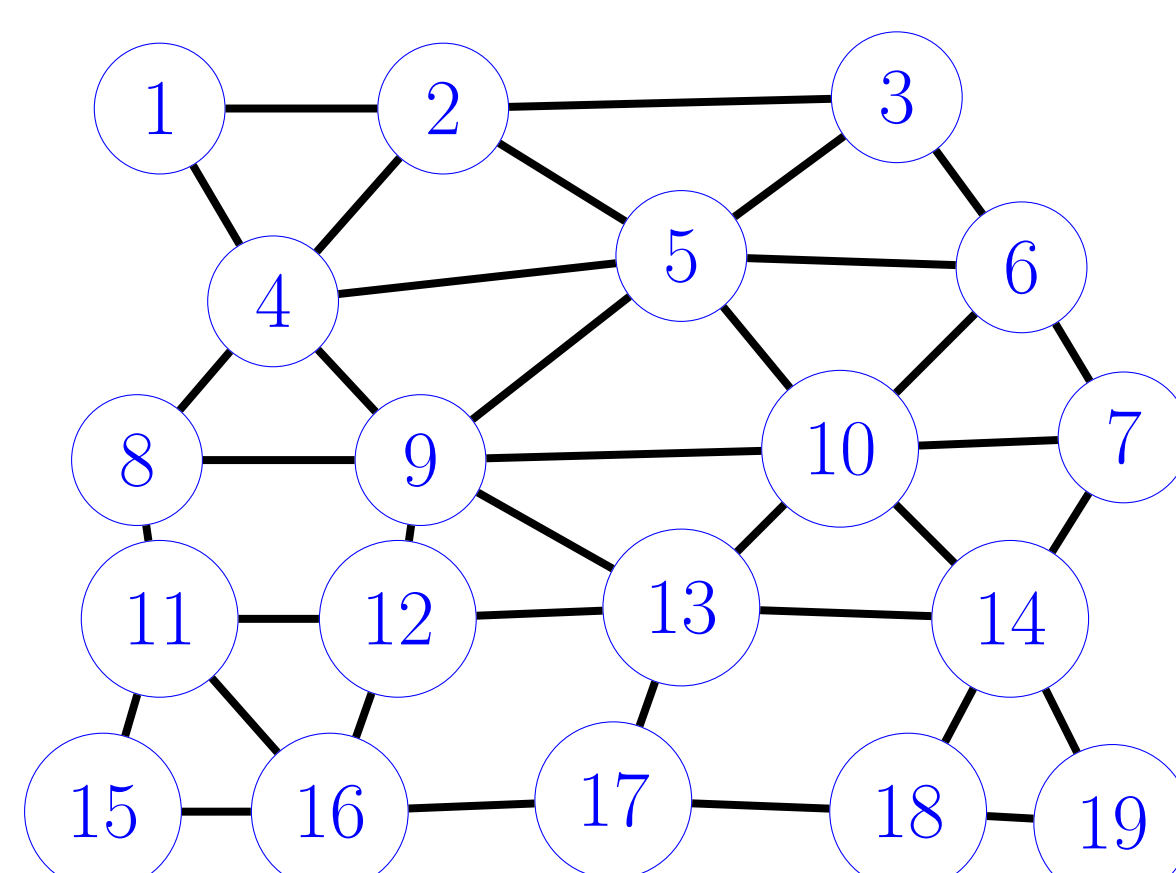
## Colorier un graphe ...

... n'est pas toujours simple. Le nombre minimal de couleurs dont on a besoin pour colorier un graphe (sans que deux sommets voisins soient de même couleur) est appelé le **nombre chromatique**. Par le théorème des 4 couleurs, on sait qu'il est inférieur ou égal à 4 dans le cas d'un graphe planaire.

Voici un **algorithme** simple qui permet de le faire. Il fonctionne pour des graphes non nécessairement planaires. Le nombre de couleurs utilisé est en général supérieur au nombre chromatique du graphe. Pour cela, on a besoin d'utiliser la notion de **degré d'un sommet** qui est simplement le nombre de sommets auxquels il est relié.

- On classe les sommets du graphe par ordre décroissant de degré dans une liste  $L$ .
- On choisit une première couleur avec laquelle on colore le premier sommet (appelons-le  $A$ ) de  $L$ .
- On parcourt  $L$  jusqu'à éventuellement trouver un sommet non voisin à  $A$  (appelons-le  $B$ ) et on colorie  $B$  de cette même couleur.
- On continue notre parcours de  $L$  jusqu'à éventuellement trouver un sommet voisin ni de  $A$  ni de  $B$  et on colorie ce nouveau sommet de cette même couleur.
- On continue jusqu'à avoir parcouru  $L$  en entier. Au fur et à mesure qu'on colorie un sommet, on le retire de  $L$ .
- On recommence de même avec la couleur suivante...

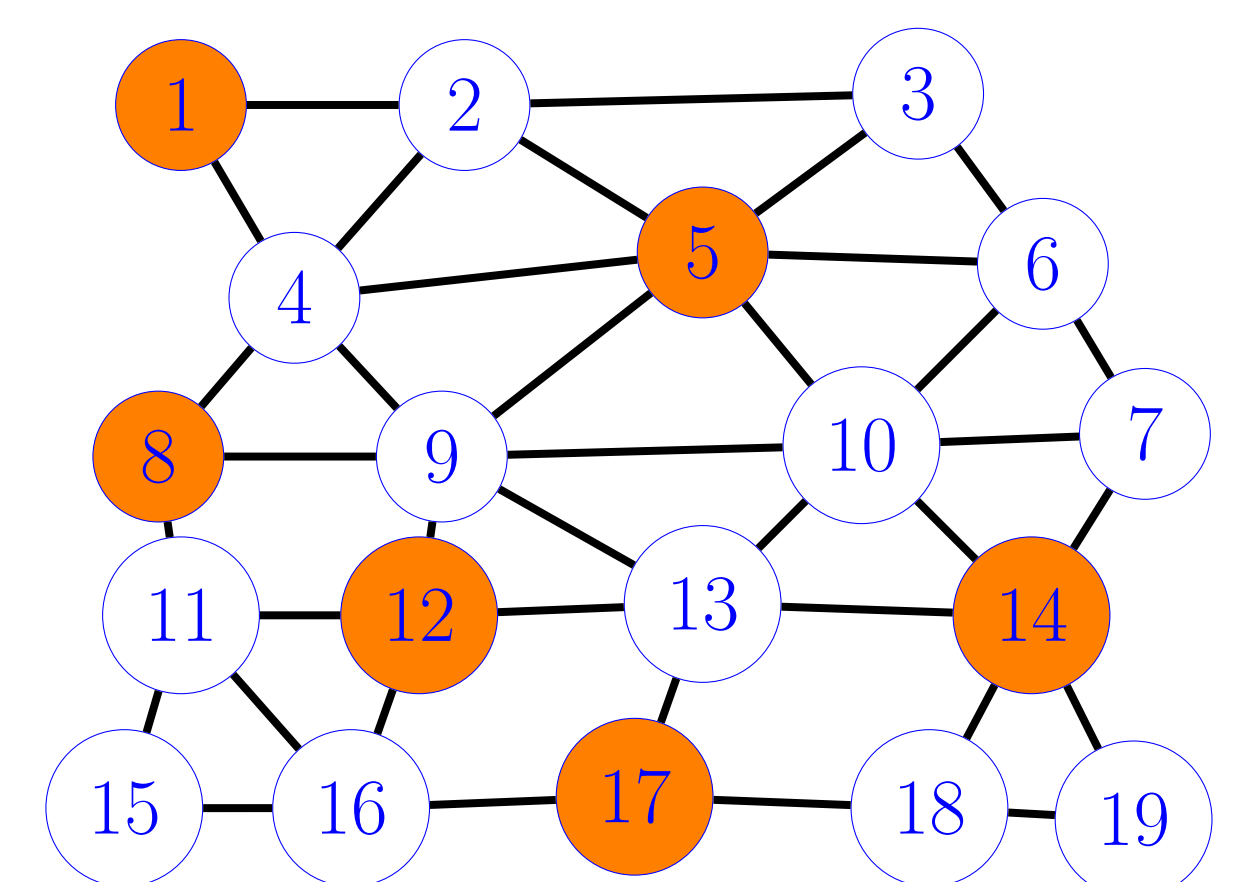
On numérote les sommets.



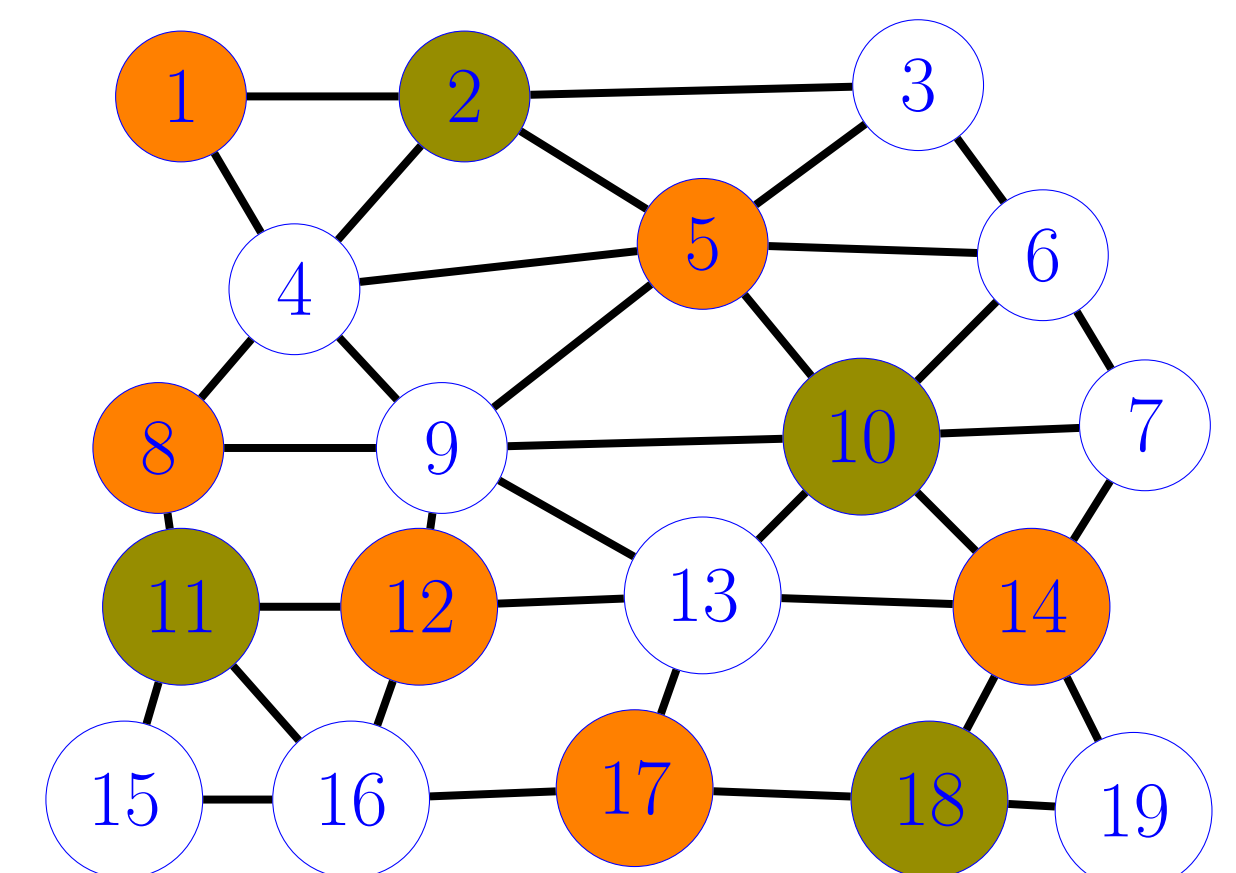
Cela donne par exemple

$$L = [5, 10, 9, 4, 14, 13, 2, 6, 4, 12, 11, 16, 3, 8, 7, 17, 18, 19, 1]$$

On parcourt  $L$  une première fois avec la couleur **orange**.



On a maintenant  $L = [10, 9, 4, 13, 2, 6, 4, 11, 16, 3, 7, 18, 19]$ . On recommence avec la couleur **verte**.



On continue ... et finalement, on obtient :

