La suite logistique

Définition

Soient $a \in [0,4]$ et $u_0 \in [0,1]$. On définit (u_n) par récurrence par la relation

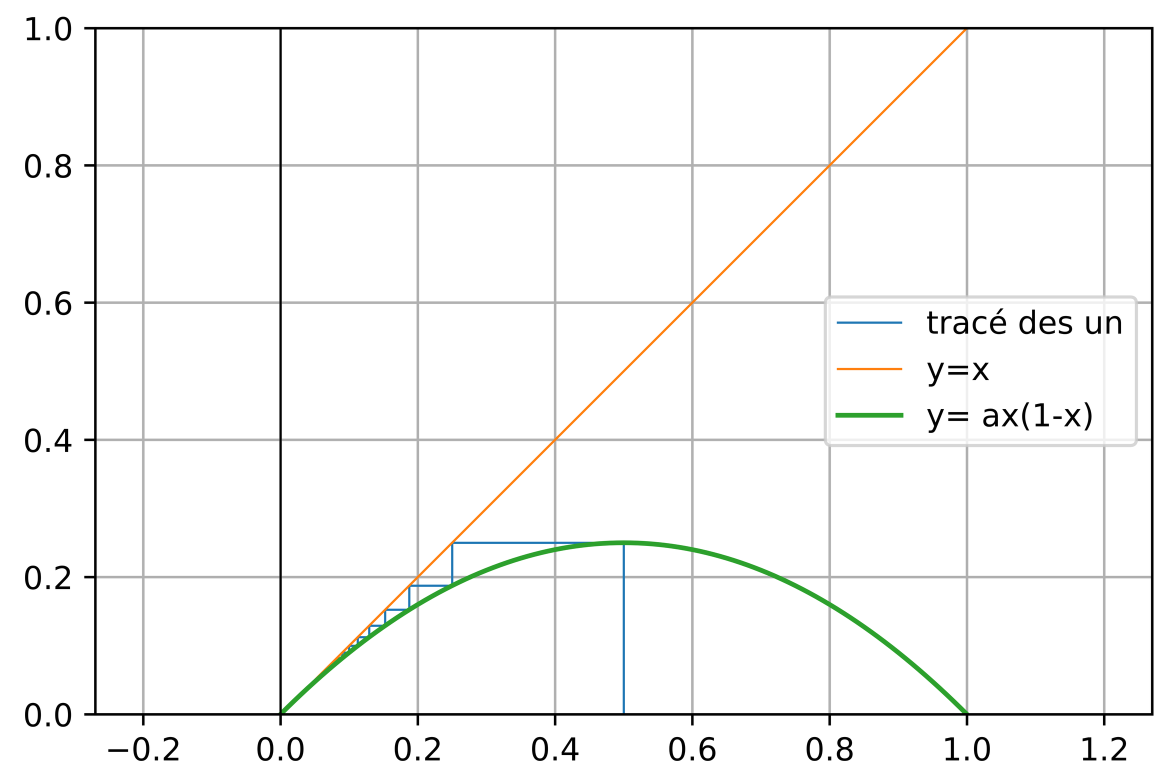
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n(1-u_n).$$

(u_n) est appelée la **suite logistique**.

- Cette suite est à valeurs dans $[0,1]$.
- Lorsque $a \in [0,1]$, (u_n) converge vers 0.
- Lorsque $a \in]1,3]$, (u_n) converge vers $\frac{a-1}{a}$.
- Lorsque $a \in]3,4]$, (u_n) peut ne pas converger, avoir un comportement cyclique ou même avoir un comportement **chaotique** !

Lorsque $a \in [0,1]$

Lorsque $a \in [0,1]$, (u_n) est décroissante et converge vers 0 qui est l'unique **point fixe** de f.



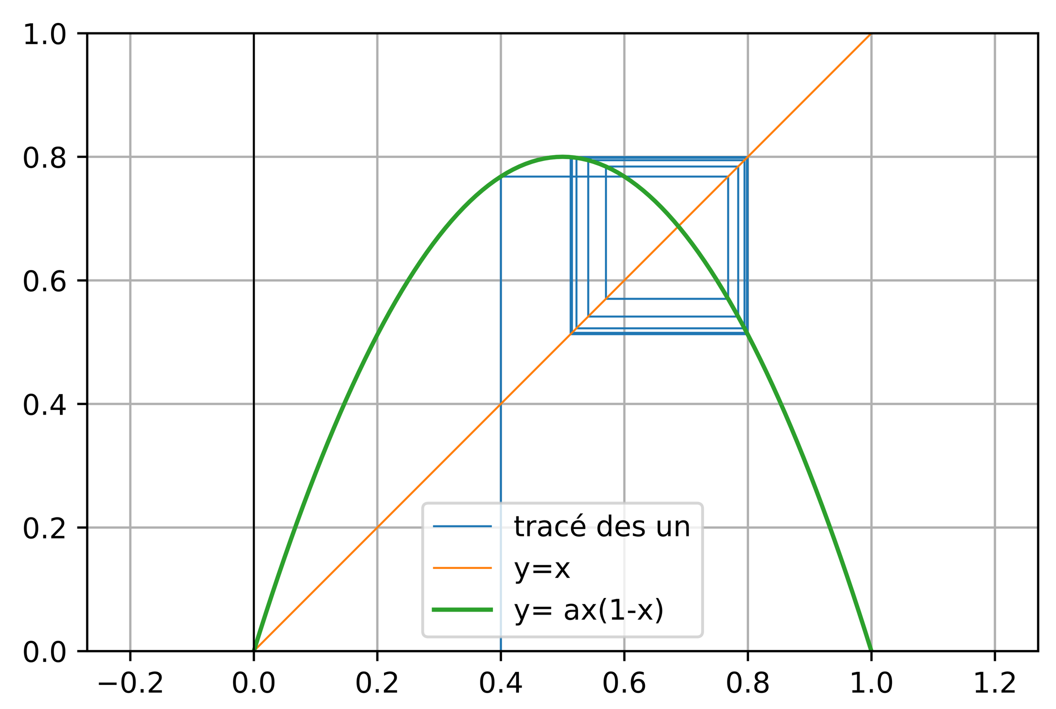
Mitchell Jay Feigenbaum ...

... est un physicien et mathématicien américain (1944 - 2019). Il a travaillé sur les **équations différentielles** et en particulier sur les **systèmes proies/prédateurs**. Il a aussi travaillé sur la suite logistique et a montré qu'elle est liée à certaines équations différentielles.

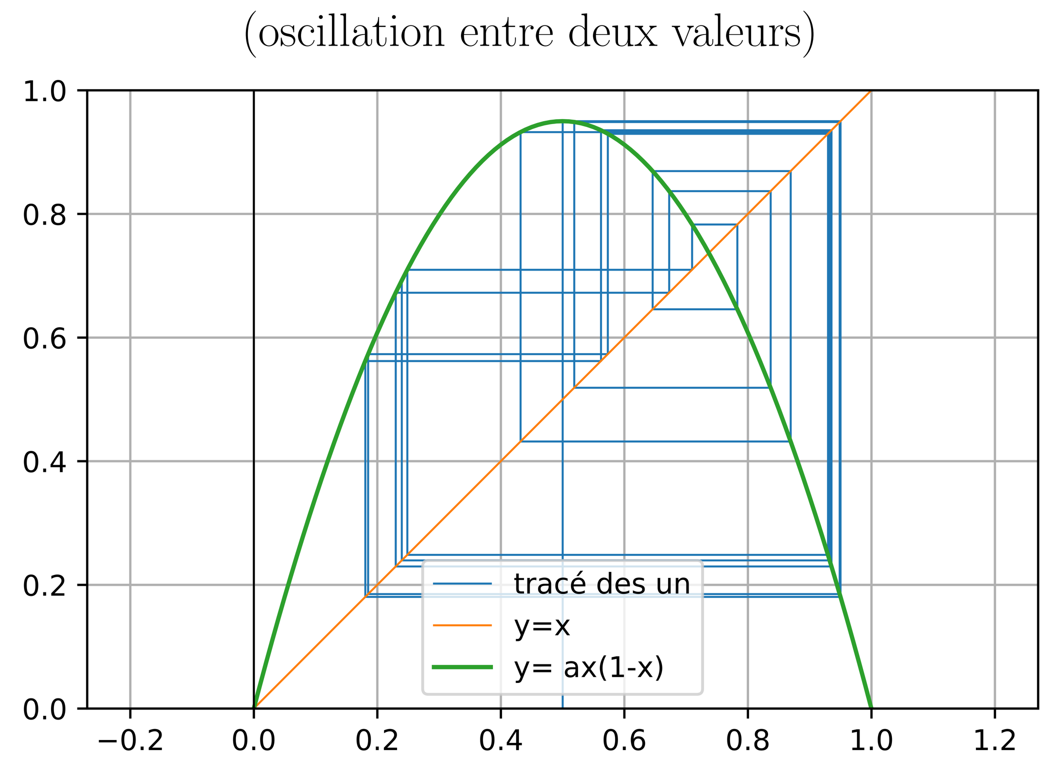
Lorsque $a \in]3,4]$

Et le chaos apparaît ...

En général, la suite ne converge pas. Selon les valeurs de a, la suite peut osciller entre plusieurs valeurs ou bien avoir un comportement chaotique.



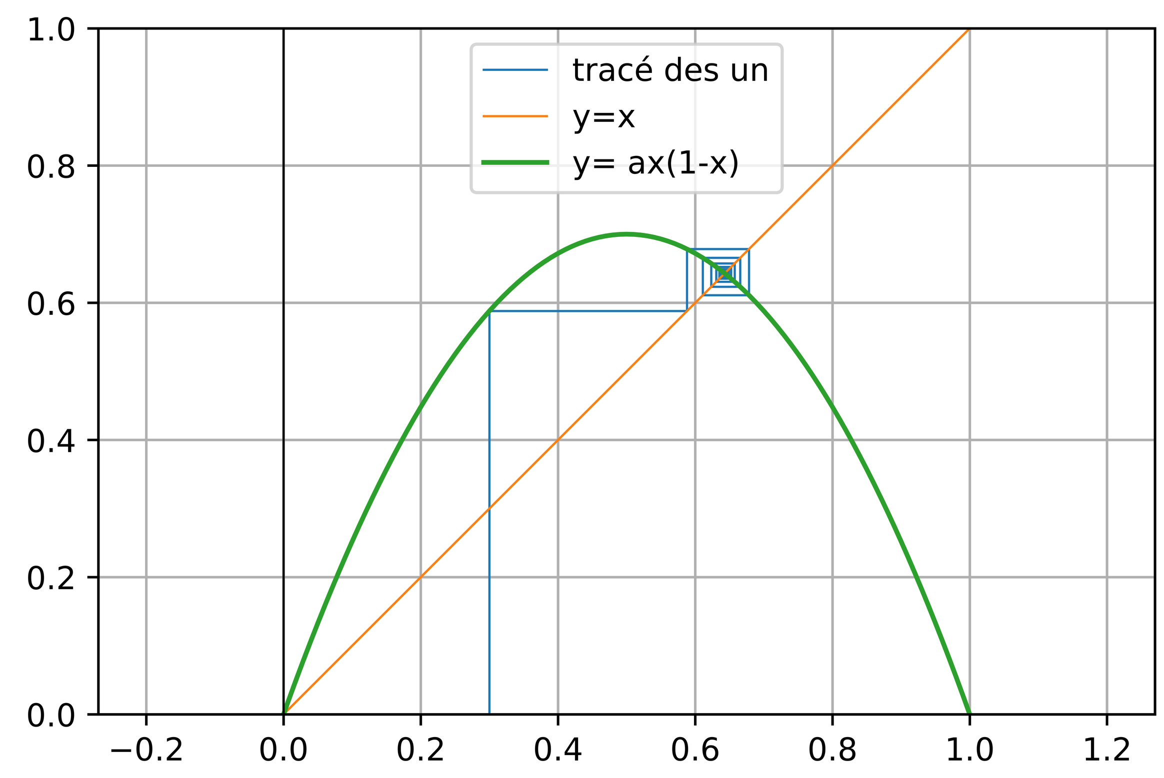
(oscillation entre deux valeurs)



(comportement chaotique)

Lorsque $a \in]1,3]$

Lorsque $a \in]1,3]$, f a deux points fixes : 0 et $\frac{a-1}{a}$. Si $u_0 \neq 0$, alors (u_n) converge vers $\frac{a-1}{a}$. On dit que $\frac{a-1}{a}$ est un point fixe **attractif** et que 0 est un point fixe **répulsif**.



Au fait, que représente (u_n) ?

Considérons une **population** donc on note $y(t)$ la population à l'instant t puis $m(y(t))$ le taux de **mortalité** et $n(y(t))$ le taux de **natalité**. Le modèle de Verhulst fait deux hypothèses :

- m et n sont des fonctions affines respectivement croissantes et décroissantes,
- pour tout t : $y'(t) = y(t)(m(y(t)) - n(y(t)))$.

Ainsi, selon ce modèle, il existe deux constantes (a,b) telles que pour tout t, $y'(t) = ay(t)\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)$. Cette relation se discrétise en $v_{n+1} = av_n\left(1-\frac{v_n}{b}\right)$, puis, devient, en posant, $u_n = \frac{a}{(1+a)b}v_n$, $u_{n+1} = au_n(1-u_n)$.

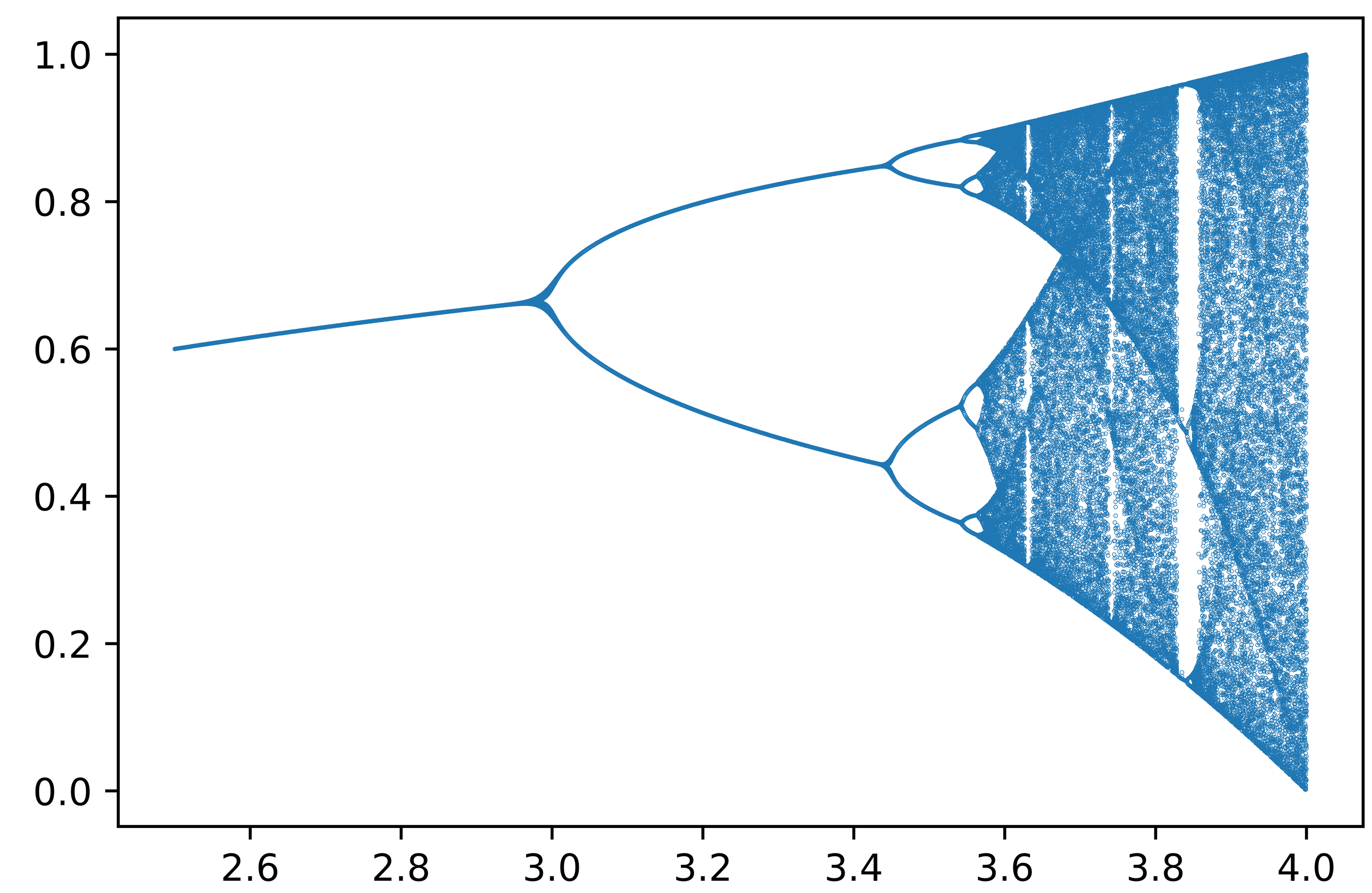
Constante de Feigenbaum

Des bifurcations

Pour chaque valeur de a comprise entre 2.5 et 4, on a représenté en ordonnées les valeurs prises par u_n pour $n \in [\![100,150]\!]$.

- Pour $a \in [2.5,3]$, on retrouve la **convergence** de la suite.
- Pour $a \in]3,d_1]$, la suite oscille entre deux valeurs (on dit qu'elle a deux **valeurs d'adhérence**) ($d_1 \approx 3.45$).
- Pour $a \in]d_1,d_2]$, la suite oscille entre quatre valeurs ($d_2 \approx 3.54$).
- ...
- Pour $a \in]d,4]$, la suite a un comportement **chaotique** ($d \approx 3.57$ et $d = \lim d_n$).

Feigenbaum a montré que la suite de terme général $\frac{d_{n+2}-d_{n+1}}{d_{n+1}-d_n}$ converge vers $\delta \approx 4.669$ qui est appelé la première constante de Feigenbaum.



Encyclopédie des suites d'entiers (OEIS)

L'OEIS **O**nline **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences est une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique. On y trouve par exemple la suite de Fibonacci (**A000045**) ou encore la suite des nombres de Catalan (**A000108**). La suite des chiffres de l'écriture en base 10 de la première constante de Feigenbaum est référencée : c'est la suite **A006890**.

LaTeX TikZposter