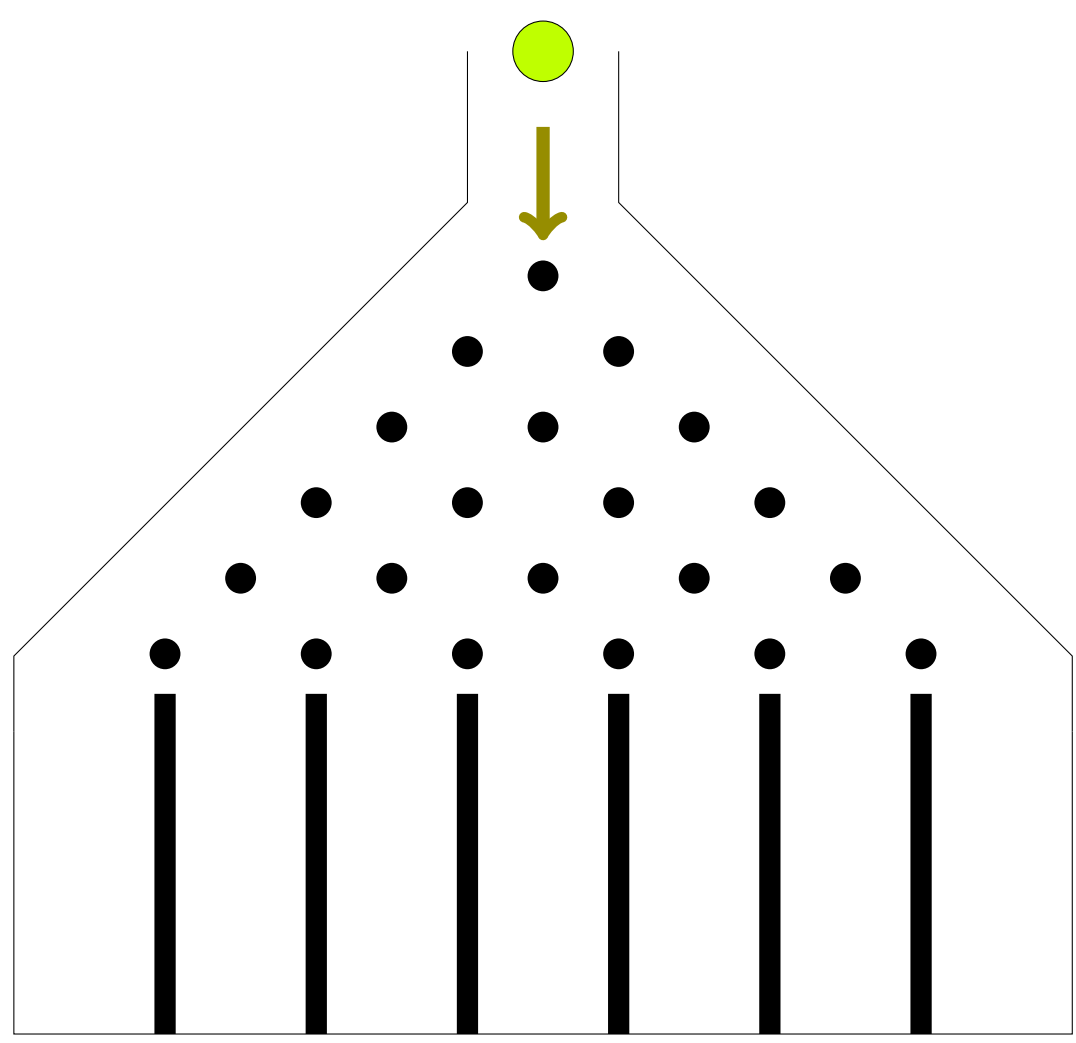


PROBABILITÉS CURIEUSES

Planche de Galton

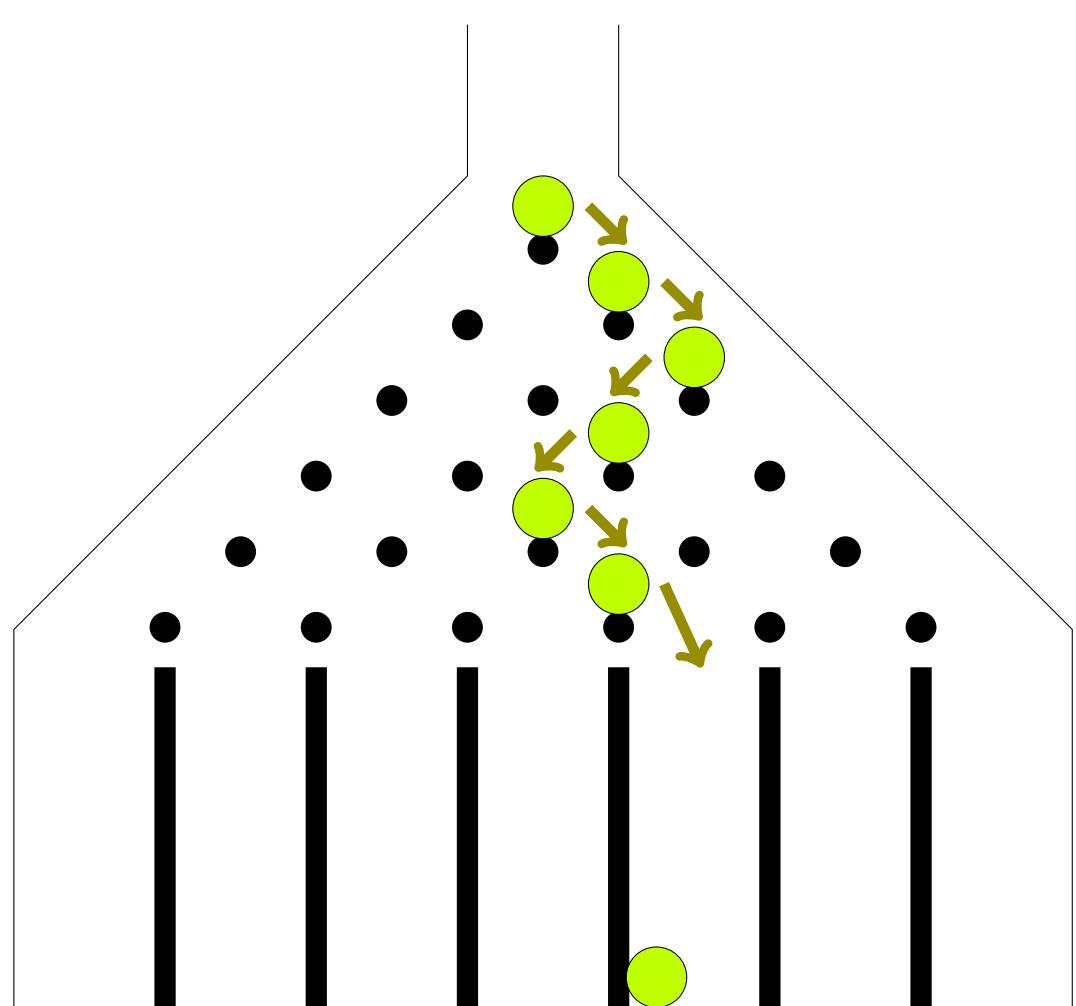
~ L'expérience ~

Une **planche** de GALTON est constituée de rangées de **clous** (les ●) agencés comme sur l'illustration. On maintient la planche verticalement et on laisse tomber des billes du haut de la planche.

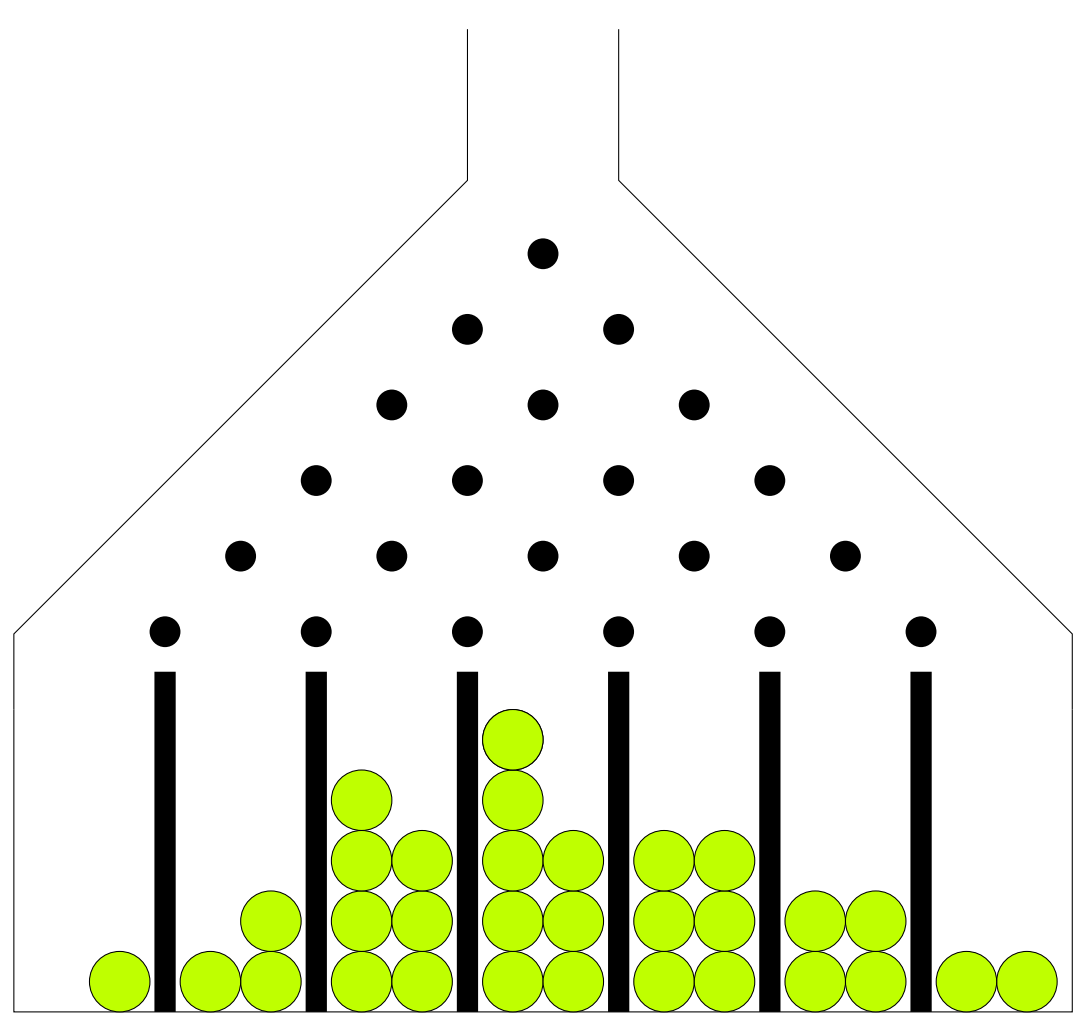


Sur chaque clou, une bille a une probabilité 1/2 de **rebondir à droite ou à gauche**.

Chaque bille **termine sa course dans un des réservoirs** du bas de la planche.

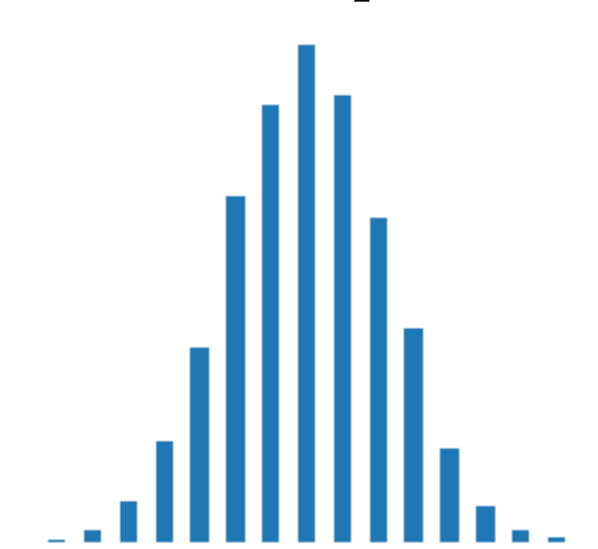


Voilà ce qu'on peut obtenir après avoir lancé **plusieurs billes** :

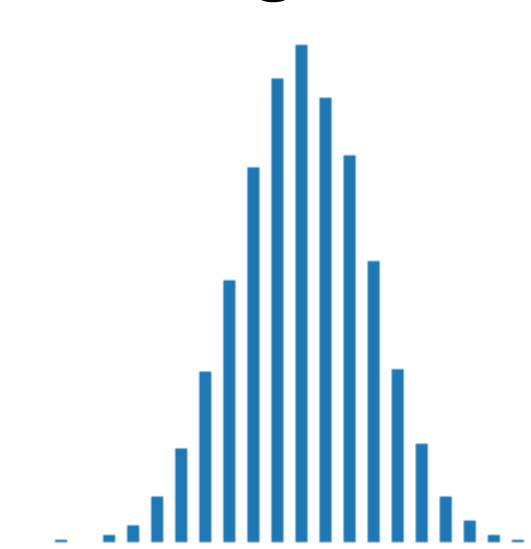


~ La courbe de Gauss ~

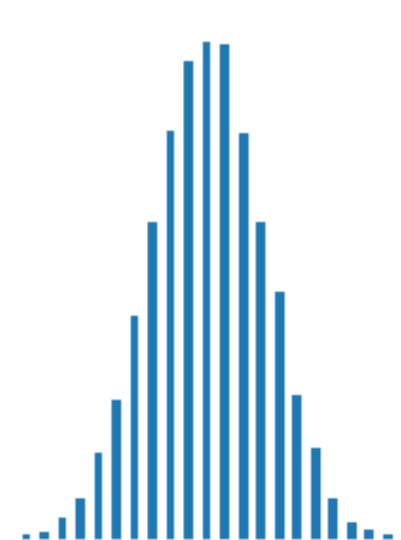
À l'aide de **Python**, on peut simuler cette expérience avec **b** billes et une planche possédant **r** rangées de clous.



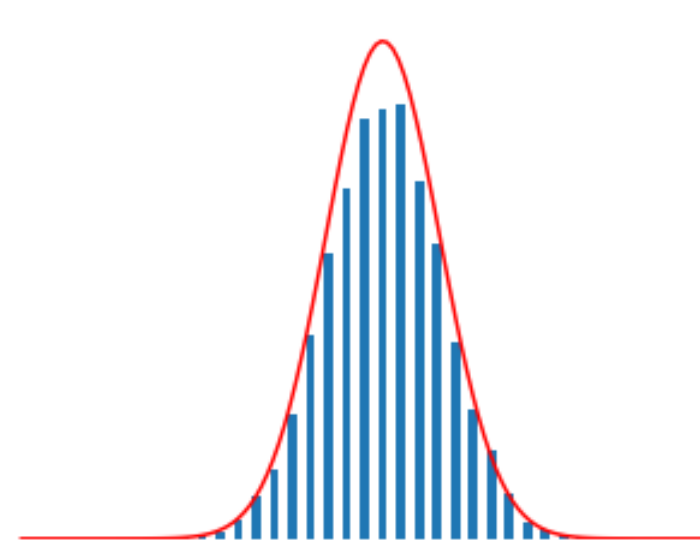
$r = 20, b = 10000$



$r = 30, b = 10000$



$r = 40, b = 10000$



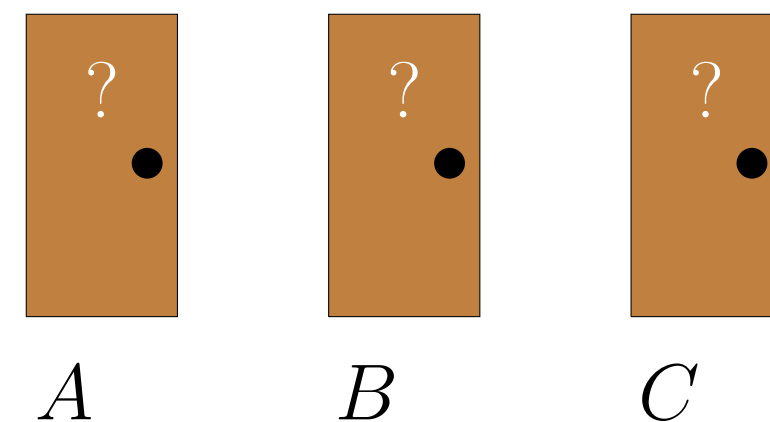
$r = 40, b = 10000$

On voit alors apparaître la **courbe de Gauss** dont une équation cartésienne est $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Ce résultat de convergence peut se démontrer à l'aide d'un théorème fondamental : le **théorème Central Limit**.

Le jeu de Monty Hall

~ Règles du jeu ~

Émilie a, devant elle, **trois portes**. Elle sait que derrière l'une d'elles se trouve **un trésor**. Monty, le maître du jeu, sait où se trouve le trésor.



Le jeu se déroule en **trois étapes** :

- ① Émilie choisit l'une des trois portes mais ne l'ouvre pas.
- ② Monty ouvre l'une des deux portes non choisies par Émilie et ne contenant pas le trésor.
- ③ Émilie a la possibilité de modifier son choix : elle peut soit garder la porte qu'elle avait choisie au départ, soit choisir l'autre porte non ouverte.

Émilie a-t-elle intérêt à modifier son choix ?

~ Réponse et explications ~

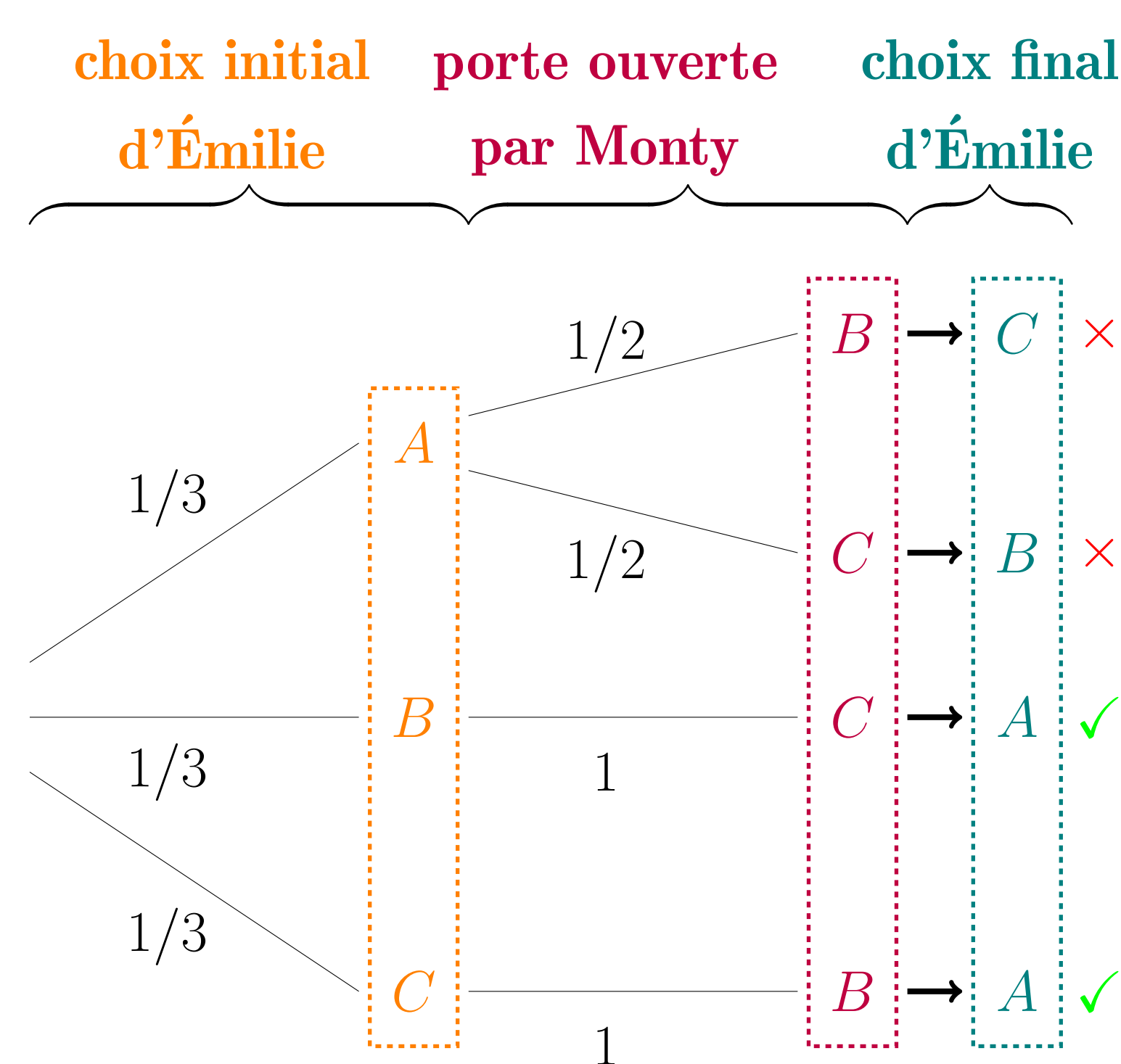
Pour fixer les idées, admettons que le trésor soit caché derrière la porte A.

Émilie **commence par choisir** l'une des trois portes A, B ou C ; puis, Monty ouvre une **des deux autres portes**.

- Si Émilie **ne modifie pas** son choix initial, la probabilité qu'elle gagne est de 1/3 (elle a choisi une des trois portes au départ).
- Si elle **modifie** son choix, **la probabilité qu'elle gagne est alors de $\frac{2}{3}$** .

Pour le montrer, on représente l'expérience à l'aide d'un arbre :

- ★ le **premier niveau** de l'arbre indique la porte choisie initialement par Emilie,
- ★ le **second niveau** de l'arbre indique la porte ouverte par Monty,
- ★ à **droite** de l'arbre figure la porte finalement choisie par Emilie.



La **probabilité de gagner** est donc ici de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ c'est-à-dire de $\frac{2}{3}$.

Origine de ce paradoxe

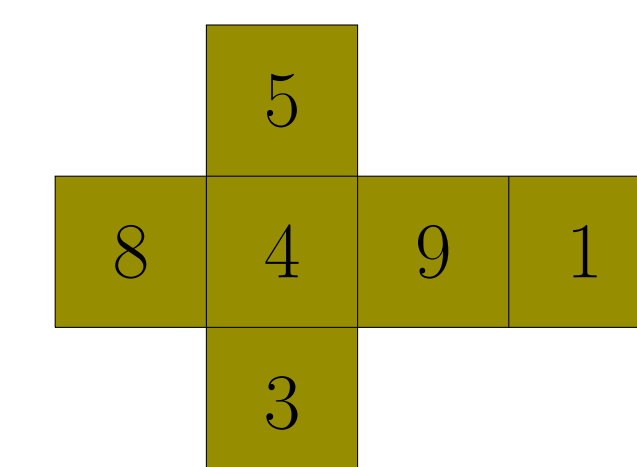
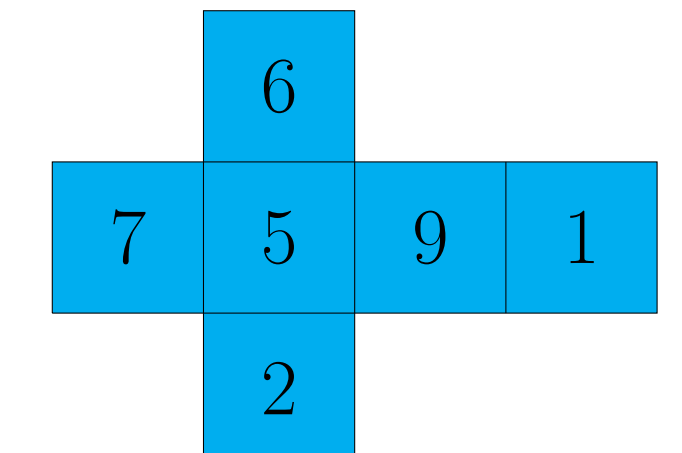
Ce jeu mathématique est directement inspiré d'un jeu télévisé américain *Let's make a deal* dont le présentateur était Monty HALL.

Dés étranges

Trois joueurs, **Alice**, **Bob** et **Claire** disposent chacun d'un dé (nommés A, B et C). Ces dés sont un peu spéciaux car leurs faces ne sont pas numérotées de 1 à 6.

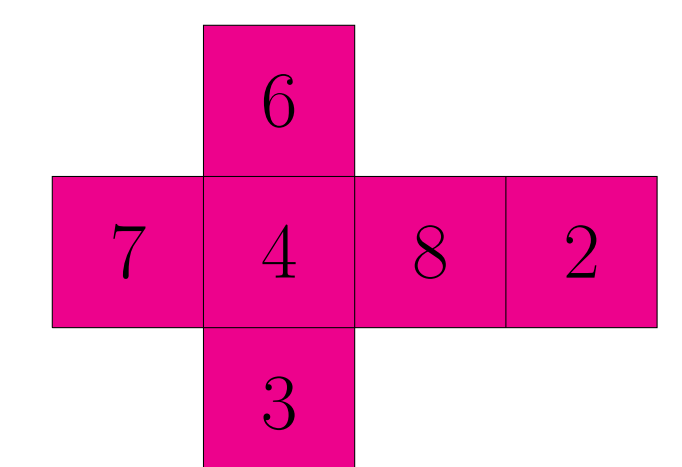
~ Les dés ~

Les faces du **dé A** sont 1, 2, 5, 6, 7 et 9



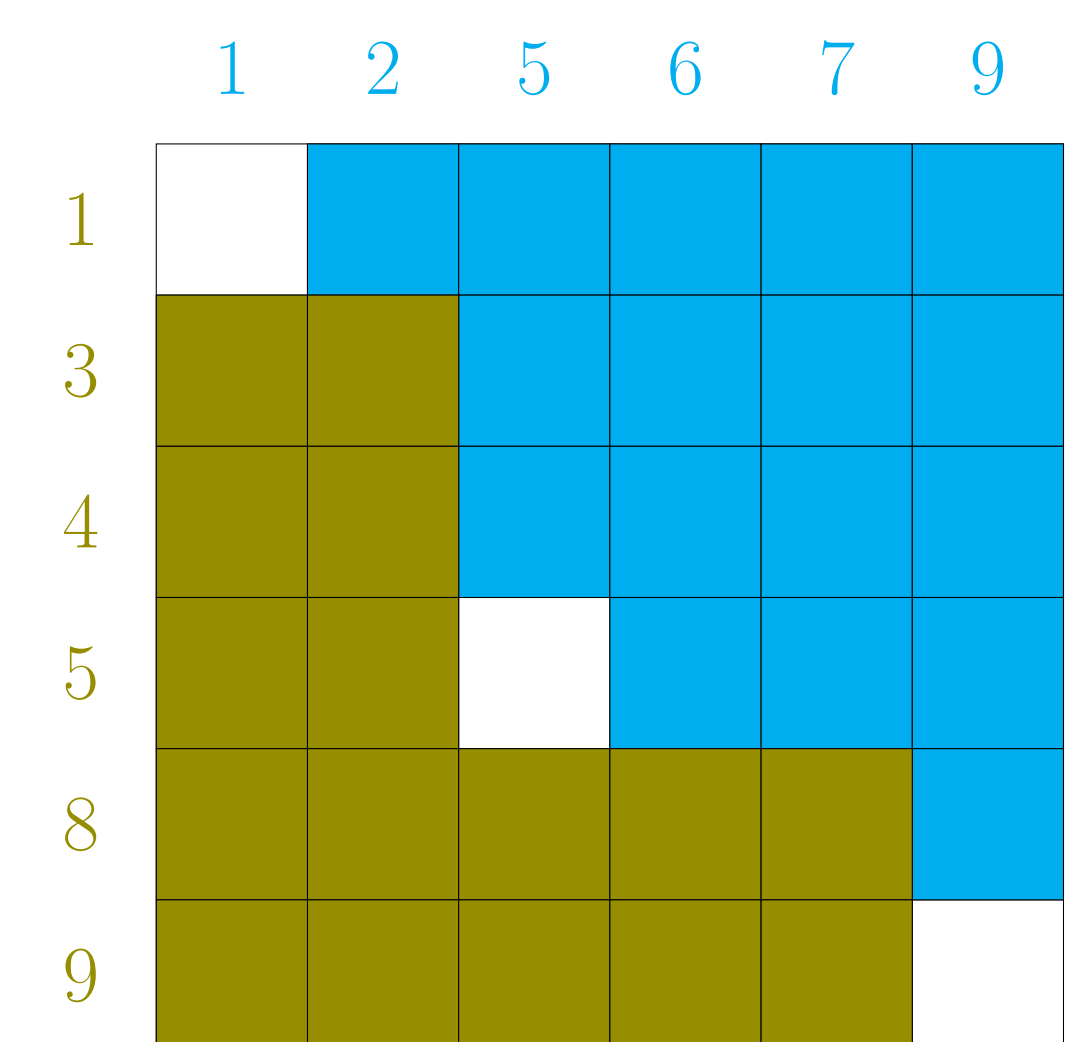
Les faces du **dé B** sont 1, 3, 4, 5, 8 et 9

Les faces du **dé C** sont 2, 3, 4, 6, 7 et 8



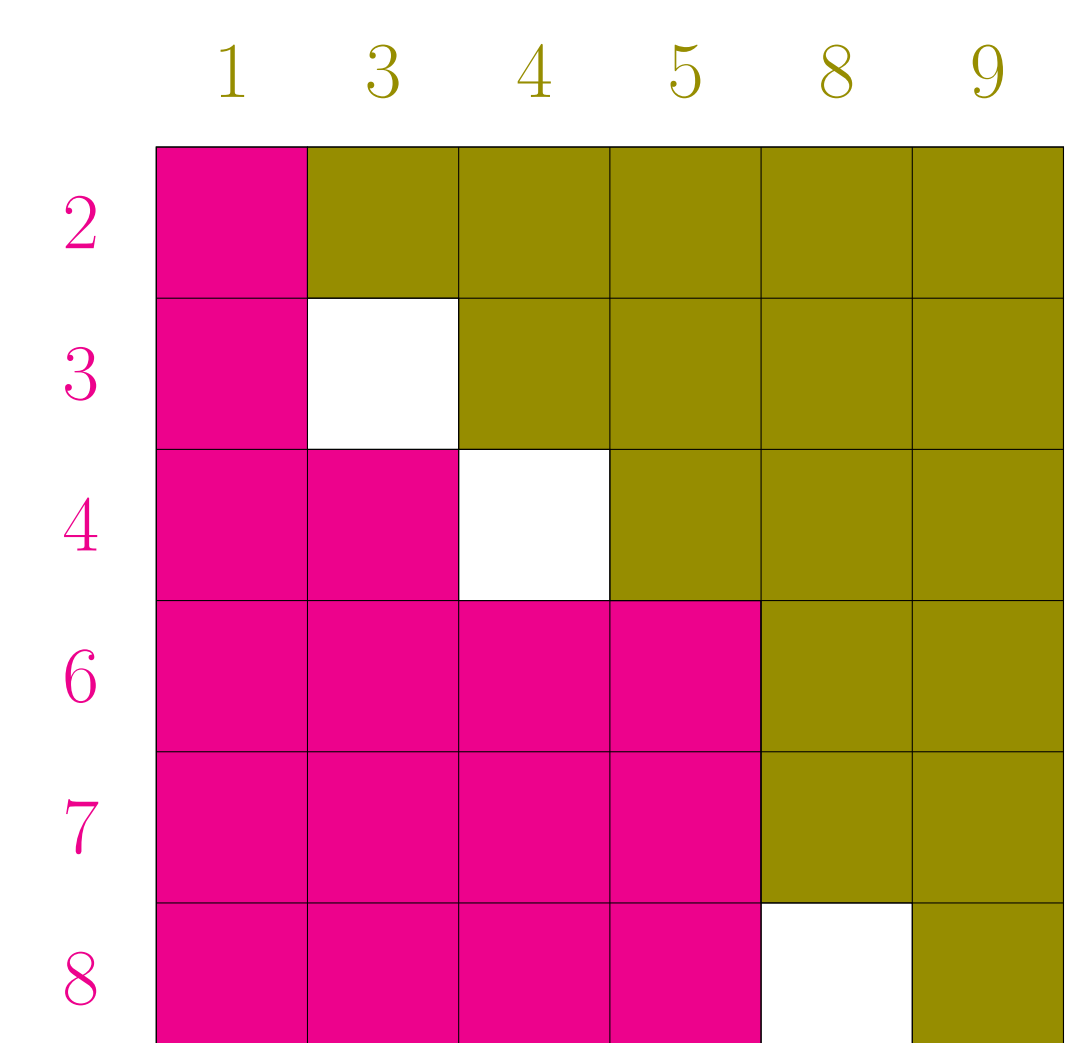
Voyons quel est le dé le plus fort...

~ Alice vs Bob ~



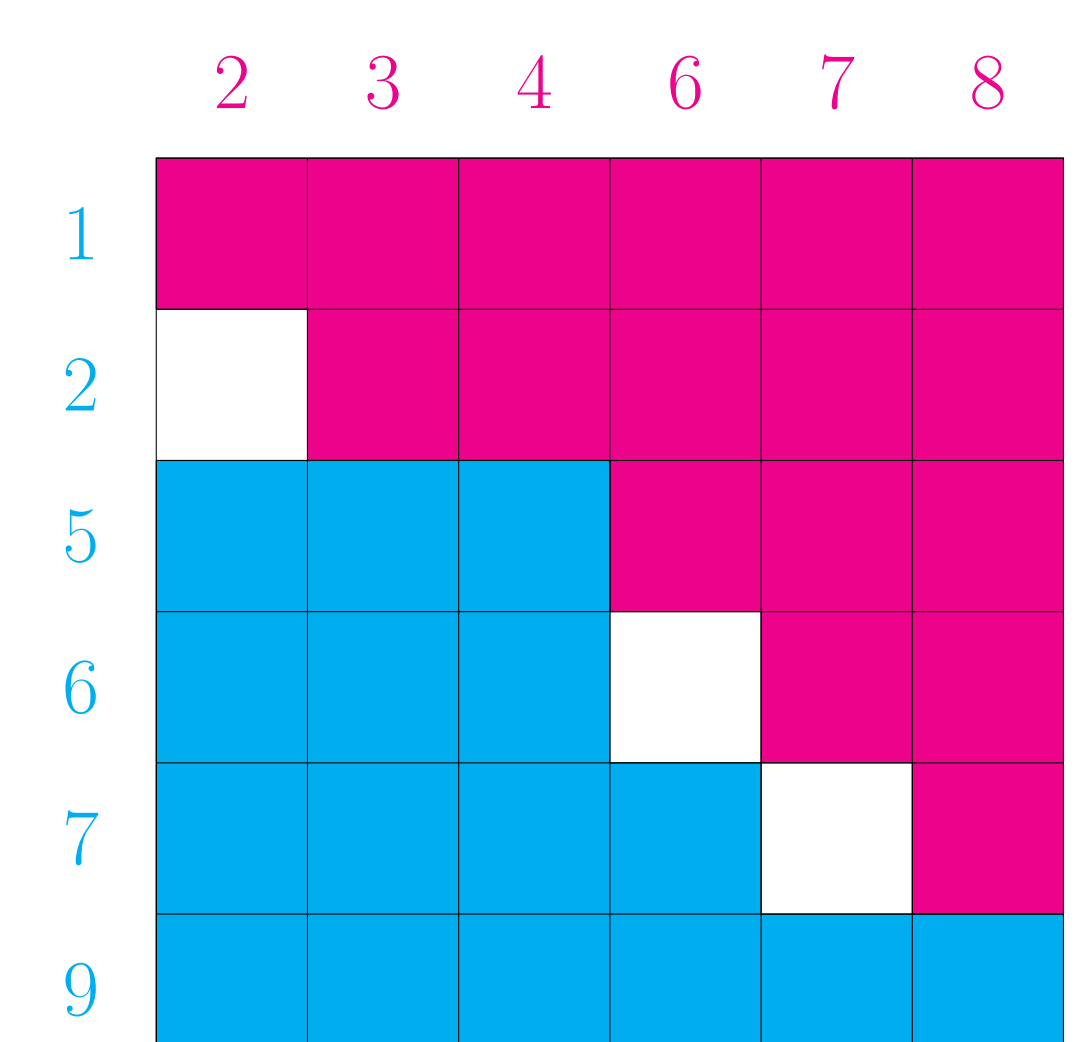
La probabilité qu'**Alice** l'emporte est de $\frac{17}{36}$ et celle que **Bob** l'emporte est de $\frac{16}{36}$.

~ Bob vs Claire ~



La probabilité que **Bob** l'emporte est de $\frac{17}{36}$ et celle que **Claire** l'emporte est de $\frac{16}{36}$.

~ Claire vs Alice ~



La probabilité que **Claire** l'emporte est de $\frac{17}{36}$ et celle qu'**Alice** l'emporte est de $\frac{16}{36}$.